Apología de un Matemático

G. H. Hardy

Digitalización: maplewhite@gmail.com

Prefacio

Estoy en deuda con el profesor C. D. Broad y con el doctor C. P. Snow por sus muchas y valiosas críticas, después de leer ambos mi manuscrito original. He incorporado la mayor parte de casi todas sus sugerencias a mi texto y así he eliminado de él un buen número de imperfecciones y puntos oscuros.

Sólo en un caso concreto he tratado estas sugerencias de una forma diferente. La sección 28 está basada en un breve artículo que publiqué a principios de año en la revista *Eureka* (de la *Cambridge Archimedean Society*) y me ha parecido imposible reelaborar lo que había escrito tan recientemente y con tanto cuidado. Además, si hubiera intentado abordar adecuadamente tan importante sugerencia, debería de haber extendido dicha sección tanto como para hacer peligrar el equilibrio de esta obra. La he mantenido, por tanto, sin cambios, pero he añadido una breve nota al final del libro con los argumentos principales de mis mencionados críticos.

G. H. H.

18 de julio de 1940

1

Es una experiencia melancólica para un matemático profesional encontrarse a sí mismo escribiendo sobre matemáticas. La función de un matemático es hacer algo, es probar nuevos teoremas, es contribuir a las matemáticas y no hablar sobre lo que él u otros matemáticos han hecho. Los estadistas desprecian a los publicistas, los pintores menosprecian a los críticos de arte, y fisiólogos, físicos o matemáticos tienen normalmente sentimientos parecidos; no hay desprecio más profundo, o en su conjunto más justificable, que aquél que sienten los hombres que crean hacia los hombres que explican. La exposición, la crítica y la apreciación son tareas para mentes de segunda clase.

Recuerdo haber discutido este punto una vez en una de las pocas conversaciones serias que tuve con Housman. Éste, en la conferencia magistral en recuerdo de Leslie Stephen titulada *El nombre y la naturaleza de la poesía*, rechazó muy enfáticamente que él fuera un «crítico»; pero lo negó de una forma que a mí me parece singularmente perversa, pues expresó una admiración por la crítica literaria que me asustó y escandalizó.

Comenzó con una cita de su primera clase, impartida veintidós años antes:

> *No puedo decir si la facultad de la crítica literaria es el mayor regalo que el cielo guarda entre sus tesoros; pero el cielo debe pensarlo así porque es el don concedido más parcamente. Los oradores y los poetas..., aunque poco frecuentes en comparación con las zarzamoras, son más abundantes que los regresos del cometa Halley: los críticos literarios son aún menos abundantes...*

Y continuaba:

> *En estos veintidós años he mejorado en algunos aspectos y empeorado en otros, pero no he mejorado tanto como para convertirme en un crítico literario, ni he empeorado tanto como para imaginarme que me he convertido en uno.*

Me pareció deplorable que un gran académico y un exquisito poeta hubiera podido escribir esto, y cuando varias semanas después me encontré si-

tuado a su lado en el Hall me lancé a exponerle mi opinión. ¿Pretendía que lo que había dicho fuese tomado en serio? ¿Era para él realmente comparable la vida del mejor de los críticos con la de un académico y un poeta? Discutimos estas cuestiones durante toda la cena y pienso que al final estaba de acuerdo conmigo. No intento reclamar un triunfo dialéctico sobre un hombre que ya no me puede contradecir, pero «Quizá no enteramente» fue al final su contestación a la primera pregunta y «Probablemente no» su respuesta a la segunda.

Puede haber existido alguna duda sobre los sentimientos de Housman y yo no deseo pretender que esté de mi lado, pero no hay ninguna duda sobre los sentimientos de los hombres de ciencia, que comparto plenamente. Así pues, si me encuentro a mí mismo no escribiendo matemáticas sino sobre matemáticas, esto es una confesión de debilidad por la que puedo correctamente ser despreciado o compadecido por los matemáticos más jóvenes y vigorosos. Escribo sobre matemáticas porque, como cualquier otro matemático que ha sobrepasado los sesenta, no tengo ya la frescura mental, la energía o la paciencia necesarias para realizar de un modo efectivo mi propio trabajo.

2

Tengo la intención de presentar una apología de las matemáticas aunque me digan que no es necesario porque ahora hay algunos estudios reconocidos generalmente, por buenas o malas razones, como beneficiosos y dignos de elogio. Esto puede ser verdad y, por supuesto, desde los sensacionales descubrimientos de Einstein es probable que la astronomía y la física atómica sean las únicas disciplinas científicas que se encuentren por encima en la estimación pública. Un matemático no necesita ahora estar a la defensiva. No tiene por qué encontrar la clase de oposición descrita por Bradley en la admirable defensa de la metafísica que forma parte de la introducción a su obra *Apariencia y Realidad*.

Dice Bradley que un metafísico va a escuchar que «el conocimiento metafísico es totalmente imposible» o que «incluso si es posible hasta un cierto grado, no merece tener el nombre de conocimiento». «Los mismos proble-

mas», oirá decir, «las mismas disputas, el mismo fracaso total. ¿Por qué no abandonar y dejarlo? ¿No hay nada mejor que merezca tu esfuerzo?». No hay nadie tan estúpido como para utilizar este tipo de lenguaje en relación con las matemáticas. La cantidad de conocimientos matemáticos es imponente y sus aplicaciones prácticas, como puentes, máquinas de vapor y dinamos, se imponen en la mente más obtusa. La gente no necesita ser convencida de que hay algo en las matemáticas.

Todo esto es muy reconfortante para los matemáticos, pero uno genuino difícilmente estará contento con ello. Cualquier matemático genuino debe sentir que la razón de ser de las matemáticas no se apoya en estos logros, que la reputación popular de que gozan las matemáticas se basa principalmente en la ignorancia y la confusión, y que hay todavía espacio para una defensa más racional. En cualquier caso, estoy dispuesto a intentar hacerla. Debería de ser una tarea más simple que la difícil apología de Bradley.

Debería entonces preguntar: ¿por qué merece la pena hacer un estudio serio de las matemáticas? y ¿cuál es la justificación de la vida de un matemático? Y mis respuestas serán, en su mayor parte, las que se pueden esperar de un matemático: pienso que merece la pena y que tiene una amplia justificación. Debo decir inmediatamente que mi defensa de las matemáticas va a ser una defensa de mí mismo y que mi apología no puede evitar ser, hasta cierto punto, egoísta. No tendría sentido que yo las justificase si me considerase a mí mismo como uno de sus fracasos.

Algún egoísmo de este tipo es inevitable y no pienso que realmente necesite disculpa. El trabajo bien hecho no es obra de personas «humildes». Por ejemplo, una de las primeras obligaciones de un profesor es exagerar un tanto la importancia de su asignatura como su propia importancia dentro de ella. Una persona que se pregunta continuamente «¿merece la pena lo que hago?» y «¿soy la persona adecuada para hacerlo?» será siempre ineficaz para sí y desmotivador para los demás. Debe cerrar un poco los ojos a la realidad y valorarse a sí mismo y a su asignatura un poco más de lo que merecen. Esto no es demasiado difícil: más duro es no hacer que parezcan ridículos por cerrar completamente los ojos.

3

Un hombre que se lanza a justificar su existencia y sus actividades tiene que hacerse dos preguntas. La primera es plantearse si el trabajo que hace merece la pena, la segunda es preguntarse por qué lo hace, cualquiera que sea su valor. La primera pregunta es a menudo muy difícil y su respuesta muy descorazonadora; pero a la mayor parte de la gente incluso le parecerá bastante fácil responder a la segunda. Si son honestos, sus respuestas serán de dos formas, siendo una de ellas una ligera variante de la otra, que es la única explicación que tenemos que tomar en serio.

1.- «Hago lo que hago porque es la única cosa que yo puedo hacer bien. Soy abogado, agente de bolsa o jugador profesional de criquet porque tengo cierto talento para este trabajo en particular. Soy abogado porque tengo facilidad de palabra y me interesan las sutilezas legales; soy agente de bolsa porque mi opinión sobre los mercados es rápida y fiable; soy jugador profesional de criquet porque puedo golpear la pelota inusualmente bien. Estoy de acuerdo en que sería mejor ser poeta o matemático, pero desafortunadamente no tengo el talento necesario para tales ocupaciones».

No estoy sugiriendo que este tipo de defensa la pueda efectuar la mayor parte de la gente, pues la mayor parte de ésta no puede hacer bien nada en absoluto. Pero esta justificación es incontestable cuando es hecha sin caer en el absurdo, es decir, cuando proviene de una minoría sustancial; quizá un 5 ó incluso un 10 por ciento de las personas están capacitados para hacer algo bastante bien. Son una ínfima minoría los que pueden hacer algo realmente bien, y, entre ellos, una proporción insignificante los que pueden hacer dos cosas bien. Si una persona tiene un genuino talento debe estar dispuesto a hacer casi cualquier sacrificio para desarrollarlo plenamente.

Este punto de vista fue respaldado por el doctor Johnson:

> *Cuando le dije que había visto a Johnson (su homónimo) montar sobre tres caballos, él dijo «un hombre de este tipo debe ser alentado pues sus exhibiciones muestran la capacidad de las fuerzas humanas...»*

y de la misma forma hubiera alabado a escaladores, nadadores que cruzan a nado el Canal de la Mancha y jugadores de ajedrez a ciegas. Por mi parte,

estoy de acuerdo con cualquier tentativa encaminada a conseguir logros como éstos. Soy solidario incluso con magos y ventrílocuos y cuando personas como Alekhine y Bradman se proponen batir marcas me siento amargamente desilusionado si fracasan. En este caso, tanto el doctor Johnson como yo tenemos los mismos sentimientos que la gente en general. Como W. J. Turner ha dicho tan acertadamente, sólo los pedantes que miran por encima del hombro no admiran a los «auténticos protagonistas».

Tenemos que tener en cuenta, por supuesto, las diferencias de valor entre las distintas actividades. Yo preferiría ser novelista o pintor antes que estadista o persona de rango similar, y muchos de los caminos que llevan a la fama serían rechazados por perniciosos por la mayor parte de nosotros. Sin embargo, lo raro es que tales diferencias de valor cambien la elección profesional de una persona, que será casi siempre dictada por las limitaciones de sus habilidades naturales. La poesía es más valorada que el criquet, pero Bradman estaría loco si fuera a sacrificar su carrera en el criquet para ponerse a escribir poesía de segunda clase (porque supongo que es improbable que lo pudiera hacer mejor). Si para estas personas el criquet fuera menos importante y la poesía más, entonces la elección podría ser más difícil. Yo no sé si preferiría haber sido Victor Trumper o Rupert Brooke. Afortunadamente, tales dilemas raramente se le presentan a un matemático. Es habitual exagerar enormemente las diferencias entre los procesos mentales de los matemáticos y los del resto de la gente, pero es innegable que el talento para las matemáticas es uno de los más especializados, y que los matemáticos como grupo no se distinguen particularmente por su habilidad general y su versatilidad. Si una persona es, de alguna forma, un matemático auténtico, entonces existe una proporción de cien contra uno de que sus matemáticas resulten mucho mejores que cualquier otra cosa que haga, y resultaría estúpido si dejase pasar cualquier oportunidad de practicar su único talento para realizar un trabajo indiferenciado en cualquier otro campo. Tal sacrificio sólo se puede justificar por necesidades económicas o por la edad.

4

Es mejor que comente aquí algo sobre el tema de la edad, pues es particularmente importante para los matemáticos. Ningún matemático debe permitirse olvidar que las matemáticas, más que cualquier otro arte o ciencia, son un asunto de jóvenes. Como sencillo ejemplo ilustrativo, se puede decir que la edad media a la que son elegidos los matemáticos que forman parte de la *Royal Society* es la más baja de todos los miembros.

Podemos naturalmente encontrar ejemplos más sorprendentes. Consideremos, por ejemplo, la trayectoria de un hombre que ciertamente fue uno de los tres matemáticos más grandes del mundo. Newton dejó las matemáticas a los 50 años, habiendo perdido su entusiasmo por ellas bastante antes. Sin duda alguna, se dio perfecta cuenta a los cuarenta años de que sus grandes días creativos pertenecían ya al pasado. Sus ideas más grandes, las fluxiones y la ley de la gravedad, las desarrolló hacia 1666, cuando tenía 24 años, «en aquellos días me encontraba en el mejor momento para crear, y estaba más dispuesto hacia las matemáticas y la filosofía que en cualquier otro momento desde entonces». Hizo grandes descubrimientos hasta casi los cuarenta (la órbita elíptica a los 37), pero después hizo poco más que pulir y perfeccionar.

Galois murió a los 21, Abel a los 27, Ramanujan a los 33 y Riemann a los 40. Ha habido matemáticos que han llevado a cabo una obra maestra bastante más tarde; la magna obra de Gauss sobre la geometría diferencial se publicó cuando tenía 50 años (aunque había tenido las ideas fundamentales 10 años antes). No conozco un ejemplo de un avance matemático de importancia desarrollado por una persona que haya superado los 50. Si una persona madura pierde su interés y abandona las matemáticas, es probable que la pérdida no sea demasiado importante ni para las matemáticas ni para él.

Por otro lado, la ganancia no es probable que sea sustancial: las últimas actividades de los matemáticos que abandonaron las matemáticas no son especialmente motivadoras. Newton fue un *Master of the Mint* bastante competente (cuando no se estaba peleando con alguien). Painlevé no tuvo éxito como Presidente del Gobierno francés. La carrera política de Laplace fue altamente deshonrosa, aunque no se puede tomar como un buen ejem-

plo, pues fue antes deshonesto que incompetente y, además, nunca «dejó» realmente las matemáticas. Es muy difícil encontrar un ejemplo de un matemático de primera fila que haya abandonado las matemáticas y obtenido un reconocimiento de alto nivel en otro campo. Quizá haya habido jóvenes que hubieran sido matemáticos de primer nivel si hubieran continuado sin interrupción su labor matemática, pero nunca he oído un ejemplo realmente verosímil. Todo esto está confirmado por mi propia y limitada experiencia. Todos los jóvenes matemáticos de talento que he conocido, han permanecido fieles a las matemáticas, y no por falta de ambición, sino por exceso de ella; todos han reconocido que en las matemáticas se encontraba, de alguna manera, el camino hacia una trayectoria vital destacable.

5

Existe también lo que yo he llamado la «variante sencilla» de la apología, pero la puedo refutar en unas pocas palabras.

2.- «No hay nada que yo pueda hacer especialmente bien. Hago lo que hago porque se interpuso en mi camino. En realidad, nunca tuve una oportunidad de hacer algo diferente». Esta justificación la acepto como concluyente. Es bastante cierto que la mayor parte de la gente no puede hacer nada bien. Si esto es así, importa poco que profesión eligen, y no hay nada más que decir sobre ello. Es una respuesta concluyente, pero que difícilmente asumirá una persona con algo de orgullo; puedo asumir que ninguno de nosotros estaría satisfecho con ella.

6

Ha llegado el momento de empezar a pensar sobre la primera pregunta que formulé en la sección 3, y que es bastante más difícil que la segunda: ¿Merece la pena trabajar en matemáticas, al menos en lo que yo y otros matemáticos entendemos por matemáticas? y, si eso es así, ¿por qué?

He vuelto a mirar las primeras páginas de la clase inaugural que pronuncié en Oxford en 1920. Allí hay un esbozo de una apología de las matemáti-

cas. Es un texto muy inadecuado (ocupa menos de un par de páginas) y está escrito en un estilo (un primer ensayo, supongo, de lo que yo pensaba entonces que era el estilo de Oxford) del que no estoy especialmente orgulloso; pero todavía siento que, aunque necesite un desarrollo más amplio, aborda la parte esencial del asunto. Resumiré lo que dije entonces a modo de prólogo para un debate más amplio.

Empecé haciendo hincapié en la inocuidad de las matemáticas, «el estudio de las matemáticas es, si bien poco útil, una ocupación perfectamente inocente e inocua». Sigo pensando lo mismo, aunque obviamente ello va a necesitar de una buena dosis de desarrollo y explicación.

¿Son «improductivas» las matemáticas? En ciertos aspectos claramente no lo son pues, por ejemplo, proporcionan un gran placer a un gran número de personas. Estoy, sin embargo, hablando de «productividad» en un sentido restrictivo. ¿Son «útiles» las matemáticas, directamente útiles, como lo son otras ciencias como la química y la fisiología? Ésta no es una pregunta en absoluto fácil o poco controvertida y debería responderla con un no, aunque algunos matemáticos, y la mayor parte de los que no lo son, responderían sin dudar que sí. ¿Son inocuas las matemáticas? Nuevamente la respuesta no es obvia y hubiera preferido evitar la pregunta, pues plantea el problema global del efecto de la ciencia sobre la guerra. ¿Son las matemáticas inocuas en el sentido en que claramente no lo es, por ejemplo, la química? Volveré sobre ambas preguntas más adelante.

Continué diciendo que «el tamaño del universo es grande y, si estuviéramos malgastando nuestro tiempo, el despilfarro de las vidas de unos pocos profesores universitarios no es una catástrofe sobrecogedora»: aquí pudo parecer que adopté o pretendí adoptar la postura de exagerada humildad que repudié hace un momento. Estoy seguro de que ésta no era la intención que estaba realmente en mi mente; estaba intentando decir en una frase lo que ya he dicho en la sección 3 con mucha mayor amplitud. Estaba asumiendo que nosotros, los profesores, tenemos nuestro pequeño talento y que difícilmente podemos equivocarnos si dedicamos nuestros mejores esfuerzos a desarrollarlo plenamente.

Finalmente (en lo que ahora me parecen unas frases terriblemente retóricas), enfaticé la permanencia de los logros matemáticos:

> *Lo que hacemos puede ser pequeño, pero tiene un cierto carácter de permanencia; y el haber producido algo perdurable, aunque sea del más mínimo interés, ya sean unos versos originales o un teorema geométrico, es haber hecho algo que es inalcanzable para las posibilidades de la inmensa mayoría de las personas.*

Y

> *En estos días de conflicto entre los saberes antiguos y modernos, seguramente que puede decirse algo sobre una ciencia que no empezó con Pitágoras, y que no acabará con Einstein, pero que es la más vieja y la más joven de todas.*

Todo esto es «retórica», pero su sustancia me parece que todavía suena a verdadera, y puedo desarrollarla inmediatamente sin que ello prejuzgue nada sobre las otras preguntas que quedan abiertas.

7

Asumo que escribo para lectores que están llenos, o han estado llenos en el pasado, de un auténtico espíritu de ambición. La primera obligación de una persona, y en particular de un joven, es ser ambicioso. La ambición es una pasión noble que legítimamente puede presentar varias formas; había *alguna* nobleza en la ambición de Atila o de Napoleón, pero la ambición más noble es la de dejar tras de sí algo que tenga un valor permanente.

> *Aquí, sobre la lisa arena,*
> *Entre el mar y la tierra,*
> *¿Qué construiré o crearé*
> *Para detener la caída de la noche?*
>
> *Dime qué runas se han de grabar*
> *Que detengan la rompiente ola,*
> *O qué bastiones se han de trazar*
> *Que me sobrevivan.*

La ambición ha sido la fuerza motriz de casi todos los logros de este mundo. En particular, prácticamente todas las contribuciones sustanciales a la felicidad humana han sido hechas por hombres ambiciosos. Por poner dos ejemplos famosos. ¿no eran Lister y Pasteur ambiciosos? O, a un nivel más modesto, ¿no lo eran King Gillette, William Willett y todos los que más han contribuido recientemente al bienestar humano?

La fisiología nos proporciona ejemplos especialmente buenos, tal vez porque se trata de una ciencia que es, obviamente, «provechosa». Debemos guardarnos contra una falacia común entre los apologistas de la ciencia: la de suponer que las personas cuyo trabajo más beneficia a la humanidad piensan mucho en ello mientras lo hacen y que los fisiólogos, por ejemplo, tienen un alma particularmente noble. Un fisiólogo puede, por supuesto, alegrarse al pensar que su trabajo beneficiará a la humanidad, pero los motivos que le dan la fuerza y la inspiración necesarias para ello no se diferencian de aquéllos que impulsan a un estudioso del mundo clásico o a un matemático.

Hay muchos motivos altamente respetables que pueden llevar a las personas a insistir en investigar, pero hay tres que son mucho más importantes que los demás. El primero (sin el cual el resto no tiene razón de ser) es la curiosidad intelectual, el deseo de conocer la verdad. Luego, el orgullo profesional, la ansiedad por estar satisfecho con el propio rendimiento, la vergüenza que embarga a cualquier artífice que se respete a sí mismo cuando su trabajo es indigno de su talento. Finalmente, la ambición, el deseo de conseguir una buena reputación y una posición, o incluso el poder o el dinero que ello comporta. Cuando uno ha realizado su trabajo, puede ser bueno sentir que se ha contribuido a aumentar la felicidad o a aliviar los sufrimientos de otros, pero ésa no es la razón por la que se hizo. Si un matemático, un químico o incluso un fisiólogo me dijeran que la fuerza motora de su trabajo ha sido el deseo de beneficiar a la humanidad, no les creería (ni mejoraría mi opinión sobre ellos si así lo hicieran). Sus motivos dominantes han sido los que he apuntado antes, en los que seguramente no hay nada de lo que una persona decente deba avergonzarse.

8

Si la curiosidad intelectual, el orgullo profesional y la ambición son los incentivos dominantes en cualquier investigación, entonces es indudable que nadie tiene una mejor oportunidad de ver gratificado su trabajo que un matemático. Su materia es la más estimulante de todas; no hay ninguna otra en que la verdad juegue tan extrañas bromas. Tiene la técnica más desarrollada y fascinante y proporciona un sinfín de oportunidades de mostrar las más completas habilidades profesionales. Finalmente, como la historia prueba abundantemente, los logros en matemáticas, independientemente de su valor intrínseco, son los más perdurables.

Podemos ver esto incluso en civilizaciones protohistóricas. Las civilizaciones babilónica y asiria han perecido; Hammurabi, Sargon y Nabucodonosor son hoy nombres vacíos, pero las matemáticas babilónicas son todavía interesantes y el sistema sexagesimal de numeración se utiliza todavía en astronomía. Aunque, por supuesto, el ejemplo más crucial nos lo proporcionan los griegos.

Los griegos son los primeros matemáticos, todavía hoy «vigentes» entre nosotros. Las matemáticas orientales pueden ser una curiosidad interesante, pero las matemáticas griegas son la auténtica realidad. Los griegos utilizaron por primera vez un lenguaje matemático que todavía los matemáticos de hoy pueden entender; como Littlewood me dijo una vez, no son colegiales listos o candidatos a becarios, sino «catedráticos de otra universidad». Así pues, las matemáticas griegas «perduran» más incluso que la literatura griega. Arquímedes será recordado cuando Esquilo haya sido olvidado, porque las lenguas mueren y las ideas matemáticas no.

La «inmortalidad», signifique lo que signifique, puede ser una palabra absurda, pero un matemático tiene, probablemente, la mejor oportunidad de alcanzarla.

Tampoco debe temer seriamente que el futuro sea injusto con él. La inmortalidad es a menudo ridícula o cruel: pocos de nosotros escogerían ser Og, Ananías o Galio. Incluso en matemáticas, la historia juega a veces extrañas pasadas. Rolle figura en los libros de texto de cálculo elemental como si hubiera sido un matemático de la talla de Newton; Farey es inmortal porque

no consiguió comprender un teorema que Haros había demostrado perfectamente catorce años antes; los nombres de cinco respetables noruegos todavía figuran en la *Vida* de Abel, debido a un acto estúpido realizado sumisamente a costa del hombre más grande de su país. Pero vista en conjunto, la historia de la ciencia es justa y esto es particularmente cierto en matemáticas. Ninguna otra materia tiene pautas de valoración tan claramente definidas y tan unánimemente aceptadas; y las personas que son recordadas son casi siempre las que lo merecen. La fama matemática, si se tiene el dinero en efectivo para pagar por ella, es una de las inversiones más firmes y sólidas.

9

Todo esto es muy reconfortante para los profesores y, especialmente, para los de matemáticas. Ha sido sugerido a veces, por abogados, políticos u hombres de negocios que una carrera académica es buscada principalmente por personas cautas y sin ambición que se preocupan sobre todo por su bienestar y seguridad. Este reproche está fuera de lugar. Un profesor renuncia a algo y, en particular, a la posibilidad de ganar grandes sumas de dinero; es muy difícil que un profesor gane más de 2000 libras al año y la estabilidad en el puesto de trabajo es una de las consideraciones que hacen la renuncia anterior más fácil. No es éste el motivo por el que Housman hubiera renunciado a carreras como las de Lord Simon o Lord Beaverbrook. Él las hubiera rechazado por su ambición, porque habría despreciado ser un hombre que iba a ser olvidado antes de 20 años.

Sin embargo, qué penoso es sentir que, a pesar de todas estas ventajas uno puede fracasar. Puedo recordar a Bertrand Russell contándome un terrible sueño. Estaba en el último piso de la biblioteca de la universidad, y corría el año 2100. Un asistente de la biblioteca iba recorriendo los estantes llevando un enorme cubo de basura, iba sacando libro tras libro, les echaba un vistazo y, o bien los devolvía a su sitio o bien los arrojaba al cubo. Finalmente, llegó a tres grandes volúmenes que Russell pudo reconocer como la última copia existente de los *Principia Mathematica*. Sacó uno de los volúmenes, pasó unas cuantas páginas, por un momento pareció sorprendido por los curiosos símbolos, cerró el volumen, lo sopesó en su mano, titubeó...

10

Un matemático, lo mismo que un pintor o un poeta es un constructor de modelos. Si éstos son más permanentes que otros es porque están hechos con ideas. Un pintor realiza modelos con formas y colores, un poeta lo hace con palabras. Un cuadro quizá exprese alguna «idea», pero lo normal es que ésta sea un lugar común o no tenga importancia. En la poesía, las ideas desempeñan un papel mayor; pero, como Housman indica, habitualmente se exagera la importancia de las ideas en poesía: «no me convence que se diga que existen cosas tales como las ideas poéticas... La poesía no es lo que se dice, sino la forma de decirlo».

No basta todo el agua del encrespado y furioso mar
Para lavar el bálsamo con que un rey ha sido ungido

¿Podrían estos versos mejorarse y, sin embargo, podrían sus ideas ser al mismo tiempo más gastadas y más falsas? Su pobreza de ideas, difícilmente parece que afecta a la belleza verbal. Por otra parte, un matemático no tiene otro material para trabajar más que ideas, y, por tanto, sus modelos es probable que duren más tiempo, ya que las ideas envejecen más lentamente que las palabras.

Los modelos de un matemático, al igual que los de un pintor o un poeta deben ser *hermosos*; las ideas, como los colores o las palabras, deben ensamblarse de una forma armoniosa. La belleza es la primera señal, pues en el mundo no hay un lugar permanente para las matemáticas feas. En este punto, debo referirme a una interpretación errónea que está todavía ampliamente difundida (aunque probablemente mucho menos ahora de lo que lo estaba hace 20 años), que es lo que Whitehead llamó la «superstición literaria» de que el amor por las matemáticas y su apreciación estética son «una monomanía limitada a unos pocos excéntricos dentro de cada generación».

Sería difícil encontrar ahora a una persona educada que sea totalmente insensible a la atracción estética de las matemáticas. Puede ser muy arduo definir la belleza matemática, pero eso mismo sucede con cualquier otro tipo de belleza. Quizá no conozcamos exactamente qué entendemos por un poema hermoso, pero no nos impide reconocerlo cuando lo leemos. Incluso

el profesor Flogben, que a toda costa quiere minimizar la importancia del elemento estético en las matemáticas, no se atreve a negar su realidad. «Sin duda, hay individuos sobre los que las matemáticas ejercen una atracción fríamente impersonal... La atracción estética de las matemáticas puede ser muy cierta en el caso de unos pocos elegidos». Pero Hogben sugiere que son «pocos» y se comportan «fríamente» (y además son gente bastante ridícula, que vive en pequeñas y estúpidas ciudades universitarias, protegidas de las brisas frescas que corren por los amplios espacios abiertos). En esto, está meramente repitiendo la «superstición literaria» de Whitehead. Lo cierto es que pocos temas son más populares que las matemáticas. La mayor parte de la gente tiene un cierto aprecio por ellas, de la misma forma que la mayor parte de la gente puede disfrutar escuchando una melodía agradable; y es bastante probable que haya más gente que esté realmente interesada por las matemáticas que por la música. Las apariencias pueden sugerir lo contrario, pero es fácil explicarlo. La música puede usarse para estimular la emoción de la gente, mientras que las matemáticas no; además, la incapacidad para la música es considerada (sin duda correctamente) como algo medianamente deshonroso, mientras que la mayor parte de la gente está tan atemorizada por la reputación de las matemáticas, que están dispuestos, con bastante sinceridad, a exagerar su propia ignorancia sobre la materia.

Una pequeña reflexión es suficiente para dejar al descubierto lo absurdo de la «superstición literaria». En todo país civilizado, y en Rusia casi la totalidad de la población educada, hay un gran número de jugadores de ajedrez, y cada uno de ellos puede reconocer y apreciar una partida o un problema hermoso. Sin embargo, un problema de ajedrez es simplemente un ejercicio de matemáticas puras (una partida no lo es del todo porque la psicología también juega un papel importante) y todo aquél que afirme que un problema es «hermoso» está aplaudiendo a la belleza matemática incluso si esta belleza es de un tipo comparativamente bajo. Los problemas de ajedrez son como las melodías de himnos de las matemáticas.

Podemos aprender la misma lección del bridge, aunque a un nivel inferior y para un público más amplio; o incluso, bajando aún más, de las secciones de pasatiempos de los periódicos. Ciertamente, toda su inmensa popularidad es un tributo al poder de representación de las matemáticas elementales, y los mejores creadores de pasatiempos tales como Dudeney o «Caliban», utilizan

pocas cosas más. Conocen su oficio y saben que lo que el público quiere es un pequeño «estímulo» intelectual, y ningún estímulo es mejor que el de las matemáticas.

Podría añadir que no hay nada en el mundo que produzca, incluso a personas famosas (personas que han empleado un lenguaje despreciativo hacia las matemáticas), un mayor placer que descubrir o redescubrir un auténtico teorema matemático. Herbert Spencer volvió a publicar en su autobiografía un teorema sobre círculos que había demostrado cuando tenía 20 años (sin saber que había sido probado por Platón más de 2.000 años antes). El profesor Soddy es un ejemplo más reciente y más sorprendente (pero su teorema es realmente suyo).

11

Un problema de ajedrez forma parte de las matemáticas, pero, de alguna forma, se puede decir que es matemática «trivial». Aunque los movimientos sean ingeniosos y complejos, originales y sorprendentes, hay algo esencial que falta. Los problemas de ajedrez *no son importantes*. Las mejores matemáticas son tan serias como hermosas, o, si se prefiere, «importantes», aunque esta palabra es muy ambigua y la palabra «serias» expresa mucho mejor lo que quiero decir.

No estoy pensando en las consecuencias «prácticas» de las matemáticas. Volveré sobre ese punto más adelante; por el momento, sólo diré que, si un problema de ajedrez es, dicho sin ambages, «inútil», lo mismo se puede afirmar de la mayor parte de las mejores matemáticas, ya que muy poco de ellas tiene una utilidad práctica y esa pequeña parte es, comparativamente, aburrida. La «seriedad» de un teorema matemático no descansa en sus consecuencias prácticas, que son habitualmente mínimas, sino en el significado de las ideas matemáticas que enlaza. Podemos decir, grosso modo, que una idea matemática es «significativa» si puede ser relacionada de una forma natural y esclarecedora con un amplio grupo de ideas matemáticas. Así, un teorema matemático serio, un teorema que relaciona ideas significativas, es probable que conduzca a avances importantes tanto en las matemáticas como en otras ciencias. El desarrollo general del pensamiento científico no se

ha visto influido nunca por un problema de ajedrez; sin embargo, su curso si fue modificado por Pitágoras, Newton o Einstein, que lo hicieron, en sus respectivas épocas, cambiar de dirección.

La seriedad de un teorema *no radica* en sus consecuencias, que son solamente la parte *evidente* de dicha seriedad. Shakespeare ejerció una influencia enorme en el desarrollo de la lengua inglesa; Otway, por el contrario, no ejerció casi ninguna; pero ello no se debe a que Shakespeare fuera mejor poeta, sino a que escribía mucha mejor poesía. La inferioridad de un problema de ajedrez, al igual que la de la poesía de Otway, no proviene de sus consecuencias, sino de su contenido.

Hay otro asunto que me gustaría refutar muy brevemente, no porque carezca de interés sino porque es un tema difícil, y no me siento cualificado para una discusión seria sobre estética. La belleza de un teorema matemático depende bastante de su seriedad, al igual que en poesía la belleza de un verso depende hasta cierto punto del significado de las ideas que expresa. Cité antes dos versos de Shakespeare como ejemplo de la absoluta belleza de un modelo verbal, pero

> *Después de la caprichosa fiebre de la vida,*
> *él duerme tranquilo*

parece todavía más hermoso. Este modelo es tan bueno que agita nuestras emociones mucho más profundamente; además, sus ideas tienen un significado y su mensaje es razonable. Las ideas son importantes para el modelo, incluso en poesía; aunque lo son mucho más en matemáticas, pero no voy a argumentar formalmente este tema.

12

Debe de estar ya bastante claro a estas alturas que si quiero seguir avanzando en mi argumentación, debo mostrar ejemplos de teoremas matemáticos «auténticos», teoremas que cualquier matemático admita que son de primera clase. Sin embargo, estoy sometido a las restricciones bajo las que escribo. Por una parte, mis ejemplos deben ser muy simples e inteligibles para

un lector que no posea conocimientos matemáticos especializados; además, no deben necesitar complicadas explicaciones preliminares; y el lector debe ser capaz de seguir la demostración tan bien como el enunciado. Estas condiciones excluyen, por ejemplo, a muchos de los más hermosos teoremas de la teoría de números como el teorema de Fermat relativo a la ley de reciprocidad cuadrática, conocido también como teorema de la «suma de los dos cuadrados». Por otro lado, mis ejemplos tienen que ser extraídos de las «mejores» matemáticas, que son las matemáticas del matemático profesional; y esta condición excluye a una buena parte de las mismas, que sería relativamente fácil hacer inteligibles, pero que nos llevaría a adentrarnos en los campos de la lógica o de la filosofía matemática.

Por tanto, qué mejor que volver la vista hacia los griegos. Voy a enunciar y probar dos de los más famosos teoremas de las matemáticas griegas. Son teoremas «simples», tanto en su idea como en su ejecución, pero no hay ninguna duda de que son teoremas de la mayor categoría. Cada uno de ellos conserva la frescura y el significado del momento de su descubrimiento; y los más de 2000 años transcurridos no los han desgastado un ápice. Finalmente, ambos enunciados y sus demostraciones pueden ser dominados por un lector inteligente en una hora, aunque su preparación matemática sea escasa.

El primero es la demostración de Euclides de la existencia de un número infinito de números primos[1].

Los *números primos*, a los que abreviadamente llamaremos primos, son los números que no se pueden descomponer en producto de factores más pequeños[2].

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots \tag{1}$$

Así pues, por ejemplo, 37 y 317 son primos. Los primos son el material con el que mediante multiplicación se construyen todos los números, así $666 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$. Todo número que no es primo es divisible al menos por un primo (normalmente lo será por varios). Tenemos que probar que hay infinitos números primos, es decir, que la serie (1) no tiene fin.

[1] *Elementos IX 20.* No está claro el origen real de muchos de los teoremas de los *Elementos*, pero no hay ninguna razón particular para suponer que este teorema no sea de Euclides.

[2] Hay razones técnicas para no considerar a 1 como un número primo.

Supongamos que lo tuviera y que $2, 3, 5, \ldots, P$ es la serie completa (de tal forma que P es el primo mayor); y supongamos, en esta hipótesis, que existe un número Q definido por la fórmula

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots P) + 1$$

Es evidente que Q no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por P porque el resto que se obtiene al dividir en todos estos casos es 1. Pero, como hemos supuesto que no es primo, ha de ser divisible por alguno y, por tanto, hay un primo (que puede ser el mismo Q) mayor que cualquiera de ellos. Lo que contradice nuestra hipótesis de que no hay un número primo mayor que P, y, por tanto, esta hipótesis es falsa.

La demostración es por *reducción al absurdo*. Y la reducción al absurdo, que a Euclides le gustaba tanto, es una de las mejores armas de un matemático[3]. Este gambito es mejor que cualquier gambito de ajedrez, pues un jugador de ajedrez puede ofrecer el sacrificio de un peón o incluso de otra pieza, pero un matemático ofrece la partida.

13

Mi segundo ejemplo es la demostración de Pitágoras[4] de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Un «número racional» es una fracción a/b donde a y b son números enteros; podemos suponer que a y b no tienen factor común, porque si lo tuvieran lo podríamos simplificar. Decir que $\sqrt{2}$ es irracional es simplemente otra forma de decir que 2 no se puede expresar de la forma $(a/b)^2$; y esto es lo mismo que decir que la ecuación

$$a^2 = 2b^2 \qquad (2)$$

[3]Esta demostración puede efectuarse evitando la reducción al absurdo y lógicos de algunas escuelas prefieren que sea así.

[4]Esta demostración ha sido tradicionalmente atribuida a Pitágoras y es ciertamente, al menos, un producto de su escuela. Este teorema aparece, de una forma mucho más general, en Euclides (*Elementos X 9*).

no se cumple para valores enteros de a y b que no tengan factor común. Éste es un teorema de aritmética pura que no precisa de ningún conocimiento sobre «números irracionales» ni depende de ninguna teoría acerca de su naturaleza.

Lo demostraremos otra vez por reducción al absurdo; supongamos que (2) es cierto y que a y b sean enteros sin ningún factor común. En consecuencia, de (2) se deduce que a^2 es par (pues $2b^2$ es divisible por 2) y, por tanto, a es par (pues el cuadrado de un número impar es impar). Si a es par entonces

$$a = 2c \tag{3}$$

para cualquier valor entero de c; y por tanto

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2c^2 \tag{4}$$

De aquí se deduce que b^2 es par, y, por tanto (por la misma razón que antes), b es par. Esto es lo mismo que decir que a y b son ambos pares y tienen como factor común 2. Esto contradice nuestra hipótesis y, por tanto, ésta es falsa.

De este teorema de Pitágoras se desprende que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado (es decir, que su cociente no es un número racional o que no existe un número del que ambos sean múltiplos enteros). Si tomamos el lado del cuadrado como nuestra unidad de medida y d como la longitud de la diagonal, entonces, en virtud de un teorema muy conocido también atribuido a Pitágoras

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

de lo que se deduce que d no puede ser un número racional.

Podría citar un buen número de hermosos teoremas de la teoría de números cuyo significado puede comprender cualquiera. Por ejemplo, el que recibe el nombre de «teorema fundamental de la aritmética», que afirma que todo número entero puede descomponerse de una y sólo una forma en un producto de primos. Así $666 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$, y no existe otra descomposición. Es imposible que 666 sea igual a $2 \cdot 11 \cdot 29$ ó que $13 \cdot 89$ sea igual a $17 \cdot 63$ (y podemos saberlo sin calcular sus respectivos productos). Este teorema es, como su nombre indica, el fundamento de la aritmética superior; pero

su demostración, aunque no es «difícil», requiere una cierta explicación previa que podría resultar tediosa para un lector no acostumbrado al lenguaje matemático.

Otro teorema famoso y hermoso es el de «los dos cuadrados» de Fermat. Los números primos pueden (salvo el 2) agruparse en dos clases: los primos

$$5, 13, 17, 29, 37, 41, \ldots$$

que dan un resto de valor 1 cuando son divididos entre 4, y los primos

$$3, 7, 11, 19, 23, 31, \ldots$$

que dan un resto de valor 3.

Todos los primos del primer grupo, y ninguno de los del segundo, se pueden poner como la suma de dos números enteros elevados al cuadrado, es decir:

$$5 = 1^1 + 2^2 \qquad 13 = 2^2 + 3^2$$
$$17 = 1^2 + 4^2 \qquad 29 = 2^2 + 5^2$$

pero 3, 7, 11 y 19 no se pueden expresar de esta forma (como el lector puede intentar comprobar). Este teorema de Fermat es considerado, muy justamente, como uno de los más elegantes de la aritmética. Lamentablemente, no hay una demostración que sea comprensible más que para matemáticos expertos.

También hay hermosos teoremas en el campo de la «teoría de conjuntos», tales como el teorema de Cantor relativo a la «no numerabilidad» del continuo. En éste la dificultad radica exactamente en lo contrario. Cuando la terminología ha sido comprendida, la demostración es bastante sencilla, pero se necesita una considerable explicación antes de que el significado del teorema sea evidente. No voy a intentar dar más ejemplos. Los que he presentado son paradigmáticos y el lector que no los pueda apreciar difícilmente apreciará algo en matemáticas.

Dije antes que un matemático era un constructor de modelos de ideas y que la belleza y la seriedad eran los criterios por los que estos modelos deberían ser juzgados. Difícilmente creería que una persona que haya comprendido estos dos teoremas dude de que satisfacen esos requisitos. Si los

comparamos con los pasatiempos más ingeniosos de Dudeney, o con los más elegantes problemas de ajedrez planteados por los maestros de esta disciplina, su superioridad en ambos aspectos está clara: hay una inconfundible diferencia de clase. Son mucho más serios y también mucho más hermosos. ¿Podemos definir de un modo más preciso en qué reside su superioridad?

14

En primer lugar, la superioridad de los teoremas matemáticos en lo que respecta a seriedad es obvia y abrumadora. Un problema de ajedrez es el resultado de un ingenioso pero muy limitado conjunto de ideas; fundamentalmente no difieren uno de otro y no tiene repercusiones externas. Pensaríamos de la misma forma si el ajedrez no hubiese sido nunca inventado, mientras que los teoremas de Euclides y Pitágoras han influido profundamente en el pensamiento, incluso fuera de las matemáticas.

Así, el teorema de Euclides es vital para la estructura global de la aritmética. Los números primos son el material de base con el que se construye la aritmética, y el teorema de Euclides nos asegura que disponemos de suficiente material para esta tarea. Sin embargo, el teorema de Pitágoras tiene aplicaciones en un campo más amplio y nos proporciona un mejor ejemplo.

Debemos observar primero que la idea subyacente en el teorema de Pitágoras se puede aplicar más extensamente, y con pequeños cambios, a clases más amplias de «números irracionales». Podemos probar de una forma muy parecida (como Teodoro parece haber hecho) que

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}$$

son irracionales, o (yendo más allá que Teodoro) que $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[3]{17}$ son irracionales.

El teorema de Euclides nos indica que disponemos de una buena materia prima para la construcción de una aritmética coherente de los números primos. El teorema de Pitágoras y sus extensiones nos indican que, una vez que hayamos construido esta aritmética, no va a ser suficiente para nues-

tras necesidades pues hay muchas magnitudes que vamos a encontrar y no seremos capaces de medir; el ejemplo más obvio es el de la diagonal del cuadrado. La profunda importancia de este descubrimiento fue reconocida inmediatamente por los matemáticos griegos. Ellos habían empezado asumiendo (supongo que de acuerdo con los dictados «naturales» del «sentido común») que todas las magnitudes de la misma clase son conmensurables; que, por ejemplo, dos segmentos cualesquiera son múltiplos de alguna unidad común, y construyeron una teoría de las proporciones basada en este supuesto. El descubrimiento de Pitágoras puso de relieve lo erróneo de esta suposición y llevó a Eudoxo a la construcción de una teoría más profunda que aparece descrita en el Libro V de *Los Elementos*, y que es considerada por muchos matemáticos modernos como el logro más depurado de las matemáticas griegas. Esta teoría es sorprendentemente moderna en espíritu, y puede ser considerada como el principio de la moderna teoría de números irracionales, que ha revolucionado el análisis matemático y ha tenido mucha influencia en la filosofía reciente.

No hay, por tanto, duda de la «seriedad» de ambos teoremas. Merece la pena remarcar que ninguno de ellos tiene la menor importancia «práctica». En las aplicaciones prácticas, estamos acostumbrados a trabajar sólo con números relativamente pequeños; sólo la astronomía y la física atómica trabajan con números «grandes», y, por ahora, éstas tienen poca más importancia práctica que la más abstracta matemática pura. Desconozco cuál es el mayor grado de precisión necesario para un ingeniero; sin duda, somos muy generosos si tomamos hasta ocho cifras decimales. Luego

$$3,14159265$$

(el valor de π con ocho cifras decimales) es la relación

$$\frac{314159265}{100000000}$$

entre dos números de 9 dígitos. El número de números primos menores que 1000000000 es 50847478, lo que es bastante para un ingeniero, y puede vivir perfectamente feliz prescindiendo del resto. Esto en lo relativo al teorema de Euclides, pues en lo relativo al teorema de Pitágoras es obvio que los números irracionales no son interesantes para un ingeniero, ya que trabaja

sólo con aproximaciones, y todas las aproximaciones son números racionales.

15

Un teorema «serio» es un teorema que aporta ideas «significativas», y yo supongo que debo intentar analizar un poco más profundamente qué características hacen significativa a una idea matemática. Esto es muy difícil, y es improbable que cualquier análisis que yo pueda hacer aporte algo de valor. Podemos reconocer una idea «significativa» cuando la vemos, como es el caso de los dos teoremas anteriormente mencionados; pero esta fuerza de reconocimiento requiere un alto grado de sofisticación matemática y esa familiaridad con las ideas matemáticas que se tiene cuando se han pasado muchos años en su compañía. Sea como fuere, debo intentar algún tipo de análisis, a ser posible, uno que, aunque sea insuficiente, parezca sólido e inteligible. Hay dos cosas que son esenciales en cualquier caso, una cierta *generalidad* y una cierta *profundidad;* pero ninguna de estas dos cualidades es fácil de definir de una forma precisa.

Una idea matemática significativa o un teorema matemático serio debe ser «general» en un cierto sentido de la palabra. La idea debe ser una parte constituyente de muchas construcciones matemáticas, es decir, ha de ser usada en la demostración de teoremas de varias clases diferentes. El teorema debe ser de tal forma que, incluso si es formulado originalmente de una forma especial (como el teorema de Pitágoras), sea aplicable con mayor extensión y característico del conjunto de teoremas de su tipo. Las deducciones expuestas en una demostración deben ser de tal forma que pongan en relación varias ideas matemáticas diferentes. Pero todo lo anterior es bastante vago e impreciso y está sujeto a muchas reservas. Sin embargo, es bastante fácil juzgar que un teorema es improbable que sea serio cuando visiblemente carece de estas cualidades; nos basta escoger algunos ejemplos de las curiosidades aisladas que son tan abundantes en la aritmética. Voy a escoger dos, casi al azar, del libro *Mathematical Recreations* de Rouse Ball.

a) 8712 y 9801 son los únicos números de cuatro cifras que son múltiplos

enteros de sus correspondientes números «permutados»:

$$
\begin{aligned}
8712 &= 4 \cdot 2178 \\
9801 &= 9 \cdot 1089
\end{aligned}
$$

y no hay otros números inferiores a 10000 que tengan esta propiedad.

b) Hay sólo cuatro números mayores que 1 que puedan expresarse como la suma de los cubos de sus dígitos; son:

$$
\begin{aligned}
153 &= 1^3 + 5^3 + 3^3 \\
370 &= 3^3 + 7^3 + 0^3 \\
371 &= 3^3 + 7^3 + 1^3 \\
407 &= 4^3 + 0^3 + 7^3
\end{aligned}
$$

Estos son casos singulares, muy adecuados para las columnas de pasatiempos y para divertir a los aficionados, pero no hay nada en ellos que atraiga mucho a un matemático. Sus demostraciones no son ni difíciles ni interesantes, simplemente un poco enojosas. Los teoremas no son serios por una simple razón (aunque quizá no sea la más importante): la extrema singularidad tanto de sus enunciados como de sus demostraciones, que no son generalizables de forma significativa.

16

«Generalidad» es una palabra ambigua y bastante peligrosa, y no debemos dejar que domine demasiado nuestro razonamiento. Es empleada con varias acepciones tanto en matemáticas como en escritos sobre matemáticas, y hay una de ellas en particular en la que los lógicos han hecho gran hincapié, y que es, sin embargo, enteramente irrelevante aquí. En dicha acepción, que es bastante fácil de definir, *todos* los teoremas matemáticos son completa e igualmente «generales».

«La certeza de las matemáticas» dice Whitehead, «depende de su generalidad completamente abstracta». Cuando afirmamos que $2 + 3 = 5$, estamos afirmando que hay una relación entre tres grupos de «cosas»; y que

estas «cosas» no son ni manzanas ni peniques, o cosas de un tipo o de otro, sino *sólo* cosas, «cualesquiera cosas». El significado de esta afirmación es enteramente independiente de las individualidades de los miembros de cada uno de los tres grupos. Todo «objeto», «entidad» o «relación» matemática, tales como «2», «3», «5», «+» ó «=» y todas las proposiciones matemáticas en las que aparecen son completamente generales en el sentido de que son completamente abstractos. En esta acepción, una de las palabras mencionadas por Whitehead es superflua, pues generalidad significa lo mismo que abstracción.

Dicho significado es importante, y los lógicos hacen bien en insistir sobre él, pues contiene una verdad evidente que mucha gente que debería conocerla, es propensa a olvidar. Por ejemplo, es bastante corriente que un astrónomo o un físico afirme que ha encontrado una «demostración matemática» de que el universo se debe de comportar de una determinada forma. Tales afirmaciones, interpretadas literalmente, no tienen sentido. No puede ser posible probar matemáticamente que mañana habrá un eclipse, porque estos, como otros fenómenos físicos, no forman parte del mundo abstracto de las matemáticas. Yo supongo que cualquier astrónomo que fuera presionado lo admitiría, con independencia del número de eclipses que haya podido predecir correctamente.

Es obvio que no estamos hablando ahora de este tipo de «generalidad», sino que estamos buscando diferencias de generalidad entre un teorema matemático y otro, y en el sentido de Whitehead todos son igualmente generales. Así, los teoremas «triviales» a) y b) de la sección 15 son tan «abstractos» y «generales» como los de Euclides y Pitágoras, y como lo sería un problema de ajedrez. En un problema de ajedrez no importa si las piezas son blancas y negras, o rojas y verdes, o, incluso, si esas «piezas» existen físicamente. Este problema es resuelto mentalmente por un especialista, mientras que el mismo problema nosotros lo resolvemos laboriosamente con la ayuda de un tablero. El tablero y las piezas son meros artificios para estimular nuestra perezosa imaginación; y no son más esenciales para resolver el problema de lo que lo serían la pizarra y la tiza para demostrar un teorema en una clase de matemáticas.

No es este tipo de generalidad, común a todos los teoremas matemáticos,

el que estamos buscando, sino la clase de generalidad más sutil y escurridiza que intenté describir grosso modo en la sección 15. Y debemos tener cuidado para no poner demasiado énfasis incluso en este tipo de generalidad (pues pienso que lógicos como Whitehead tienden a hacerlo). No se trata meramente de «acumular sutileza sobre sutileza en cuanto al problema de generalización», que es el logro más destacado de las matemáticas modernas. Algún grado de generalidad tiene que estar presente en cualquier teorema de alto nivel, pero demasiada lleva inevitablemente a la insulsez. «Toda cosa es lo que es, y no otra cosa», y las diferencias entre las cosas son tan interesantes como sus semejanzas. No escogemos a nuestros amigos porque personifiquen las mejores cualidades de la humanidad, sino porque son como son. Y así ocurre en matemáticas; una propiedad que sea común a un gran número de objetos difícilmente puede ser excitante; también las ideas matemáticas resultan apagadas si carecen de una buena dosis de individualidad. Aquí, en cualquier caso, puedo citar a Whitehead en mi apoyo: «La amplia generalización limitada por una feliz particularidad es la concepción más fructífera».

17

La segunda cualidad que yo pedía a una idea significativa era profundidad y esto es todavía más difícil de definir. Tiene algo que ver con dificultad pues las ideas más «profundas» son habitualmente las más difíciles de comprender, aunque estos dos términos no expresan en absoluto lo mismo. Las ideas subyacentes en el teorema de Pitágoras y en sus generalizaciones son bastante profundas, pero ahora ningún matemático las encontraría difíciles. Por otra parte, un teorema puede ser esencialmente superficial y, sin embargo, ser difícil de probar (como son muchos teoremas «diofánticos», que son los relativos a la solución de ecuaciones en los números enteros).

Parece como si las ideas matemáticas estuvieran agrupadas en algo así como una serie de estratos, estando las ideas de cada estrato vinculadas mediante un complejo de relaciones tanto entre ellas mismas como con las de los estratos superior e inferior. Cuanto más bajo es el estrato más profunda es la idea (y, en general, más difícil). Así, la idea de «número irracional» es

más profunda que la de número entero: y el teorema de Pitágoras es, por esa razón, más profundo que el de Euclides.

Concentremos nuestra atención en las relaciones entre los números enteros o entre cualquier otro grupo de objetos que están en un determinado estrato. Puede suceder entonces que una de estas relaciones pueda ser comprendida totalmente, es decir, que, por ejemplo, podamos reconocer y probar alguna propiedad de los números enteros sin ningún conocimiento del contenido de estratos inferiores. De esta forma, probaríamos el teorema de Euclides teniendo en consideración solamente las propiedades de los números enteros. Pero hay también muchos teoremas sobre números enteros que no se pueden comprender adecuadamente, ni mucho menos probar, sin ahondar más profundamente y sin considerar lo que los subyace.

Es fácil encontrar ejemplos de lo anterior dentro de la teoría de números primos. El teorema de Euclides es muy importante, pero no es muy profundo, pues se puede probar que hay infinitos números primos sin utilizar una noción más profunda que la de «divisibilidad». Pero tan pronto como conocemos la respuesta a la cuestión anterior nos surgen nuevas preguntas. Hay una cantidad infinita de números primos, pero ¿cómo están distribuidos infinitamente? Dado un número bastante grande N, como pudiera[5] ser 10^{80} ó $10^{10^{10}}$, ¿cuántos números primos hay que sean menores que N?[6]. Cuando nos hacemos estas preguntas, nos estamos situando en un nivel bastante diferente. Las podemos responder con una exactitud bastante sorprendente, pero sólo si profundizarnos mucho más y por un momento dejamos a los números enteros por encima de nosotros y utilizamos las más poderosas herramientas que posee la moderna teoría de funciones. En este caso, el teorema que responde a nuestras preguntas (el llamado «teorema de los números primos») es mucho más profundo que el de Euclides o incluso que el de Pitágoras.

Podría dar una infinidad de ejemplos, pero esta noción de profundidad es bastante esquiva incluso para un matemático que la sepa reconocer y

[5]Se supone que el número de protones en el universo es de alrededor de 10^{80}. Si escribiésemos el número $10^{10^{10}}$ en toda su extensión. ocuparía aproximadamente 50000 volúmenes de tamaño mediano.

[6]Como mencioné en la sección 14 hay 50847478 números primos que son inferiores a 1000000000, pero esto es lo más lejos a lo que nuestro conocimiento exacto llega.

difícilmente podría decir aquí algo más sobre ella que fuera de mucha ayuda para otros lectores.

18

Desde la sección 11, tenemos todavía pendiente un aspecto relativo a la comparación entre las «matemáticas auténticas» y el ajedrez. Podemos dar por supuesto que la superioridad del teorema matemático auténtico es abrumadora en sustancia, seriedad y significado. Resulta igualmente obvio para una inteligencia cultivada que también tiene una gran superioridad en belleza, pero esta superioridad es mucho más difícil de definir o localizar pues el defecto principal del problema de ajedrez es claramente su trivialidad, y el contraste en este aspecto mezcla y distorsiona cualquier juicio más puramente estético. ¿Qué cualidades «puramente estéticas» pueden distinguirse en teoremas tales como los de Euclides y Pitágoras? Sólo me arriesgaré a exponer algunos comentarios inconexos.

En ambos teoremas (y dentro de ellos, por supuesto, incluyo las demostraciones) hay un alto grado de sorpresa, combinada con inevitabilidad y economía. En ellos los razonamientos son de una forma tan singular y sorprendente, las armas utilizadas son tan infantilmente simples comparadas con el enorme alcance de los resultados, que no hay forma de eludir las conclusiones. No hay complicaciones de detalle (una línea de ataque es suficiente en cada caso); y esto es verdad también respecto a las demostraciones de muchos otros teoremas difíciles cuya completa comprensión requiere un alto nivel de destreza técnica. No queremos muchas «variaciones» en la demostración de un teorema matemático, pues la «enumeración de casos» es una de las formas más aburridas de razonamiento matemático. Una demostración matemática debe parecerse a una constelación simple y claramente delimitada y no a un grupo disperso en la Vía Láctea.

Un problema de ajedrez también tiene sus sorpresas y una cierta economía; es esencial que los movimientos sean sorprendentes y que cada pieza del tablero tenga un papel en la jugada. Sin embargo, el efecto estético es acumulativo. También es esencial (a menos que el problema sea demasiado simple para ser realmente divertido) que el movimiento clave sea seguido por

un buen número de variantes, cada una de las cuales requiera su propia respuesta individual. «Si P5A entonces C6T; si... entonces...; si... entonces...»; el efecto se estropearía si no hubiera un buen número de réplicas diferentes. Todo esto es matemática genuina y, por tanto, tiene sus méritos, pero es justamente esa «demostración por enumeración de casos» (y de casos que al fin y al cabo no difieren profundamente en nada[7]) lo que un matemático auténtico tiende a rechazar.

Me inclino a pensar que podría reforzar mi argumentación apelando a los sentimientos de los mismos jugadores de ajedrez. Seguramente que un maestro de ajedrez, un jugador de grandes partidas y grandes torneos, en el fondo desdeña la habilidad de un pensador puramente matemático. El jugador tiene mucho de esto en reserva y lo puede utilizar en una emergencia: «si él hubiera hecho tal y tal movimiento, entonces yo hubiera tenido en la mente tal y tal variante ganadora». Sin embargo, el «momento álgido» del ajedrez es ante todo psicológico, una lucha entre dos inteligencias adiestradas, y no una mera colección de pequeños teoremas matemáticos.

19

Debo regresar a la apología realizada en mi conferencia de Oxford y examinar un poco más cuidadosamente algunos de los comentarios de la sección 6 que dejé para más adelante. En este momento resultará obvio que estoy interesado en las matemáticas sólo como arte creativa, pero hay otras cuestiones a considerar, y, en particular, aquélla de la «utilidad» (o inutilidad) de las matemáticas, sobre la que hay mucha confusión de pensamiento. También debemos tener en cuenta si las matemáticas son realmente tan «inocuas» como yo di por supuesto en dicha conferencia.

Se dice que una ciencia o un arte son «útiles» si su desarrollo incrementa, aunque sea indirectamente, el bienestar material y el confort de las personas, es decir, si promueve su felicidad, empleando esta palabra en su acepción más ordinaria y común. Así, la medicina y la psicología son útiles porque alivian el sufrimiento, y la ingeniería es útil porque nos ayuda a construir casas y

[7] Creo que ahora en un problema se considera un *mérito* el que haya muchas variantes del mismo tipo

puentes, y, de esta forma, a aumentar nuestro nivel de vida (la ingeniería también hace daño, por supuesto, pero no es ésa ahora la cuestión). Algunas matemáticas son ciertamente útiles en este sentido, pues los ingenieros no podrían hacer su trabajo sin una buena base matemática, y las matemáticas están empezando a tener aplicaciones incluso en psicología. Tenemos en esto un posible argumento para la defensa de las matemáticas, que puede no ser ni la mejor ni especialmente sólida, pero que hay que considerar. Los «más nobles» usos de las matemáticas, de existir, los que comparte con cualquier arte creativa, van a ser irrelevantes para nuestro análisis. Las matemáticas pueden, como la poesía o la música, «promover y mantener un elevado hábito mental», e incrementar la felicidad de los matemáticos e incluso de otra gente; pero defenderlas basándose en este argumento sería meramente dar más explicaciones sobre lo que yo ya he dicho antes. Lo que tenemos que considerar ahora es la utilidad de las matemáticas en un sentido «amplio».

20

Todo esto puede parecer obvio, pero incluso en esta cuestión se produce un alto grado de confusión, pues la mayor parte de las materias «útiles» son aquéllas cuyo aprendizaje es justamente más inútil para la mayor parte de nosotros. Es útil tener un número adecuado de fisiólogos e ingenieros, pero la fisiología y la ingeniería no son estudios útiles para una persona corriente (aunque su estudio puede ser defendido basándose en otros argumentos). Por mi parte, no me he encontrado nunca en una posición, fuera de las matemáticas puras, en la que tanto conocimiento científico como poseo me haya proporcionado el más mínimo beneficio.

Es bastante sorprendente comprobar cuán escaso valor práctico tiene el conocimiento científico para una persona corriente, qué aburrido y tópico es en relación con su valor, y cómo éste parece variar en relación inversa a su presunta utilidad. Es útil ser razonablemente rápido en la aritmética más común (y eso es, por supuesto, matemática pura). Es útil saber un poco de francés o de alemán, un poco de historia y de geografía, o incluso un poco de economía. Pero saber un poco de química, física o fisiología no tiene ningún valor en la vida cotidiana. Sabemos que el gas arderá sin conocer cuál

es su composición química; cuando nuestros coches se averían, los llevamos al taller; cuando nuestro estómago tiene problemas, vamos a la farmacia o a ver a un médico. Vivimos basados en la intuición o en el conocimiento profesional de otros.

Sin embargo, éste es un tema secundario, un problema de pedagogía, que interesa sólo a los maestros que tienen que aconsejar a los padres que reclaman una educación «útil» para sus hijos. Cuando afirmamos que la fisiología es útil, no queremos decir, por supuesto, que la mayoría de la gente tenga que estudiarla, sino que su desarrollo por especialistas va a incrementar el bienestar de la mayoría. Las cuestiones importantes para nosotros son ahora ver hasta qué punto las matemáticas pueden pretender este tipo de utilidad, qué tipo de matemáticas pueden reclamarla con más justificación, y hasta qué punto el estudio intensivo de las matemáticas se puede justificar sobre esta base.

21

A estas alturas es probable que estén claras las conclusiones a las que voy llegando; por tanto, las enunciaré primero escuetamente y luego las ampliaré un poco más. Es innegable que una buena parte de las matemáticas elementales tiene una considerable utilidad práctica (y uso la palabra «elemental» en el sentido en que es usada por los matemáticos profesionales, que incluye, por ejemplo, un buen conocimiento del cálculo diferencial e integral). Esta parte de las matemáticas es, en conjunto, bastante monótona, pues es la parte que tiene menor valor estético. Las matemáticas «auténticas» de los «auténticos» matemáticos, es decir, las matemáticas de Fermat, o Euler, o Gauss, o Abel o Riemann, son totalmente «inútiles» (y esto es cierto tanto en el caso de las matemáticas puras como en el de las aplicadas). Es imposible de justificar la vida de un matemático profesional genuino sólo sobre la base de la «utilidad» de su obra.

Llegados a este punto debo enfrentarme a una concepción equivocada. Algunas veces se sugiere que la gloria de los matemáticos puros radica en la inutilidad de su trabajos[8], y estos presumen de que no tengan aplicaciones

[8]Yo he sido acusado de compartir este punto de vista. Una vez dije que «una ciencia

prácticas. Esta imputación se basa habitualmente en un dicho osado atribuido a Gauss, según el cual, si las matemáticas son la reina de las ciencias, entonces la teoría de los números es, a causa de su suprema inutilidad, la reina de las matemáticas (nunca he sido capaz de encontrar la cita exacta). Estoy seguro que este dicho de Gauss (siempre que sea suyo) ha sido por lo general bastante mal interpretado. Si la teoría de números pudiera ser empleada para cualquier fin práctico y claramente honorable, si su rumbo pudiera girar hacia el fomento de la felicidad o hacia el alivio del sufrimiento humano, como la fisiología o incluso la química pueden, seguramente entonces ni Gauss ni cualquier otro matemático estaría tan loco como para desacreditar o lamentar tales aplicaciones. Pero la ciencia sirve para lo malo tanto como para lo bueno (especialmente, por supuesto, en tiempo de guerra); y tanto Gauss como otros matemáticos menos importantes tienen motivo para alegrarse de que haya una ciencia, y que sea la suya, cuya lejanía de las actividades humanas cotidianas la mantiene apacible y limpia.

22

Hay también otro concepto erróneo contra el que debemos ponernos en guardia. Se supone, de forma bastante natural, que hay una gran diferencia en utilidad entre matemáticas «puras» y «aplicadas». Esto es una falacia: hay una marcada distinción entre los dos tipos de matemáticas, que voy a explicar a continuación, pero que sólo afecta remotamente a su utilidad.

¿En qué se diferencian las matemáticas puras y las aplicadas? Ésta es una pregunta que puede responderse categóricamente y sobre la que hay un general acuerdo entre los matemáticos. En mi respuesta no habrá el mínimo asomo de heterodoxia, pero, sin embargo, necesita una pequeña introducción previa.

Mis dos próximas secciones tendrán un contenido ligeramente filosófico, que no será ni muy profundo ni necesariamente vital para mis tesis princi-

es considerada útil si su desarrollo tiende a acentuar las desigualdades existentes en la distribución de la riqueza o si, en definitiva, promueve la destrucción de la vida humana». Esta frase escrita en 1915 ha sido citada (a mi favor o en mi contra) en varias ocasiones. Fue sin duda una intencionada floritura retórica, aunque quizá fuera excusable en el momento en que fue escrita.

pales; pero utilizaré palabras que son muy frecuentemente usadas con claras implicaciones filosóficas y el lector podría ser inducido a confusión si yo no explicase cómo las voy a emplear.

He utilizado a menudo el adjetivo «auténtico» tal como se usa normalmente en una conversación. Así, he hablado de «auténticas matemáticas» y de «auténticos matemáticos», como podría haber hablado de «auténtica poesía» y de «auténticos poetas», y así voy a continuar haciéndolo. Pero ahora voy a utilizar la palabra «realidad» y con dos connotaciones diferentes.

En primer lugar, hablaré de «realidad física», y aquí otra vez volveré a utilizar la palabra en su sentido ordinario. Por realidad física entiendo el mundo material, el mundo del día y la noche, de los terremotos y eclipses, el mundo que las ciencias físicas intentan describir.

Me cuesta imaginar que, hasta este momento, algún lector haya podido tener problemas con mi lenguaje, pero ahora estoy a punto de entrar en un terreno más difícil. Para mi, y supongo que para otros matemáticos, hay otra realidad, que llamaré «realidad matemática», sobre cuya naturaleza no existe acuerdo tanto entre los matemáticos como entre los filósofos. Algunos mantienen que dicha «realidad» es «mental» y que de alguna forma la construimos, otros sostienen que tiene una existencia externa e independiente. Una persona que fuera capaz de dar una explicación convincente de la realidad matemática resolvería los problemas más difíciles de la metafísica. Si además en su explicación incluyese a la realidad física, resolvería todos ellos.

No quisiera discutir ninguna de esas cuestiones aquí, incluso si me considerase competente para hacerlo, pero voy a exponer sin mayores explicaciones mi propia posición para evitar errores menores. Creo que la realidad matemática se encuentra fuera de nosotros y que nuestra misión es descubrirla u «observarla», y que los teoremas que nosotros demostramos y que grandilocuentemente describimos como «creaciones» nuestras, son simplemente las notas de nuestras observaciones. Este punto de vista ha sido mantenido de una forma u otra por muchos filósofos de elevada categoría, desde Platón hasta nuestros días, y yo utilizaré el lenguaje que resulta natural en una persona que mantiene esa posición. Un lector al que no le guste la filosofía puede cambiar el lenguaje, pero ello no afectará casi en nada a mis conclusiones.

23

El contraste entre las matemáticas puras y aplicadas se pone de manifiesto más claramente quizá en geometría. Existe la ciencia de la geometría pura[9], en la que hay muchas geometrías: geometría proyectiva, geometría euclídea, geometría no euclídea, y así sucesivamente. Cada una de estas geometrías es un modelo, un conjunto de ideas, y debe ser juzgada por su interés y belleza. Son una representación o imagen, el producto resultante de muchas manos, una copia parcial e imperfecta (aunque precisa en su terreno) de una parcela de la realidad matemática. Pero el aspecto que ahora es crucial para nosotros es que, en cualquier caso, la geometría pura no está constituida por imágenes sino que es la realidad espacio-temporal del mundo físico. Seguramente, es obvio que no se trata de imágenes, pues tanto los terremotos como los eclipses no son conceptos matemáticos.

Esto puede sonar un poco paradójico a un profano, pero es una verdad evidente para un geómetra; y voy a intentar aclararlo con un ejemplo. Supongamos que estoy dando una clase sobre un sistema de geometría, tal como la geometría euclídea ordinaria, y que dibujo figuras en la pizarra para estimular la imaginación de mi audiencia, dibujos a mano alzada de líneas rectas, círculos o elipses. Es evidente, en primer lugar, que la veracidad de los teoremas que estoy probando no resulta afectada por la calidad de mis dibujos. Su función es, únicamente, acercar mi explicación a mis oyentes, y en el caso de que lo lograse, también es seguro que no aportaría nada que las figuras fuesen de nuevo dibujadas por el más experto dibujante. Son ilustraciones pedagógicas que no forman parte del problema en cuestión.

Vayamos un paso más lejos. La habitación en que estoy dando la clase forma parte del mundo físico y tiene su propio modelo. El estudio del mismo, y del modelo general de la realidad física, es una ciencia en sí misma, a la que podemos llamar «geometría física». Supongamos ahora que introducimos en la habitación una potente dinamo o un objeto pesado. En tal caso, los físicos nos dicen que la geometría de la habitación cambia, que su completo modelo físico ha resultado ligera pero definitivamente alterado. ¿Han pasado a ser falsos los teoremas que yo probé? Seguramente no tendría sentido suponer

[9]Por supuesto, para los propósitos de esta argumentación, llamamos geometría pura a lo que los matemáticos llaman geometría analítica.

que las demostraciones que hice han resultado afectadas, pues sería como suponer que una obra de Shakespeare cambia cuando un lector derrama su té sobre una página. La obra es independiente de las páginas en que está impresa, y las «geometrías puras» son independientes de las aulas o de cualquier otro detalle del mundo físico.

Éste es el punto de vista de un matemático puro. Los matemáticos aplicados y los físicos matemáticos naturalmente que mantienen otro punto de vista, pues están más preocupados por el propio mundo físico, que también tiene su estructura o modelo, que no podemos describir exactamente (como sí haríamos con el mundo de la geometría pura), pero sobre el que sí podemos afirmar algo significativo. Podemos describir, algunas veces con bastante exactitud y otras muy aproximadamente, las relaciones que existen entre algunas de sus partes constituyentes y compararlas con las relaciones exactas que se dan entre las partes constituyentes de algún sistema de geometría pura. Podemos ser capaces de encontrar un cierto parecido entre estos dos conjuntos de relaciones, y entonces la geometría pura pasará a ser de interés para los físicos; proporcionará, hasta cierto punto, una representación que «concuerda con los hechos» del mundo físico. El geómetra ofrece al físico un completo conjunto de representaciones entre las que escoger. Quizá una representación se ajustará mejor a los hechos que otra y entonces la geometría que la proporcione resultará ser la más importante para las matemáticas aplicadas. Puedo añadir que incluso un matemático puro puede encontrar que su apreciación por este tipo de geometría se aviva, pues no existe matemático tan puro como para no sentir ningún interés por el mundo físico; pero en la medida que sucumbe a tal tentación estará abandonando su actitud puramente matemática.

24

Se nos presenta aquí otra puntualización que los físicos pueden encontrar paradójica, aunque ésta nos parece menor de lo que era hace dieciocho años. La expondré con las mismas palabras que empleé en 1922 en una comunicación a la Sección A de la *British Association.* Entonces, mi audiencia estaba compuesta casi exclusivamente por físicos y, teniendo en cuenta esto,

quizá hablé un poco provocativamente; pero mantengo todavía la sustancia de lo que dije.

Comencé afirmando que probablemente hay menos diferencias entre las posiciones de un matemático y un físico de las que generalmente se supone, y que la más importante me parece a mí que es que el matemático está en mucho mayor contacto directo con la realidad. Esto puede parecer una paradoja pues es el físico el que trata con los problemas que describimos habitualmente como «reales»; pero una pequeñísima reflexión basta para demostrar que la realidad del físico sea cual sea ésta, posee pocos o ninguno de los atributos que el sentido común asocia instintivamente con la realidad. Una silla puede ser un conjunto de electrones que giran, o bien una idea en la mente de Dios, cualquiera de estas opciones puede tener sus méritos, pero ninguna concuerda bien con lo que nos sugiere el sentido común.

Continué diciendo que ni los físicos ni los filósofos han dado nunca una explicación convincente de lo que es la «realidad física» o de cómo el físico pasa de la confusa masa de hechos o sensaciones con la que empieza a trabajar a la construcción de los objetos a los que denomina «reales». Así pues, no se puede decir que conocemos cuál es el objeto de la física, pero esto no nos impide a nosotros comprender aproximadamente lo que un físico trata de hacer. Es obvio que intenta correlacionar el incoherente conjunto de hechos con los que se enfrenta con un esquema ordenado de relaciones abstractas; y este tipo de esquema sólo lo puede tomar prestado de las matemáticas.

Por otro lado, un matemático trabaja con su propia realidad matemática. De esta realidad, como expliqué en la sección 22, tengo un punto de vista «realista» y no «idealista». En cualquier caso (y éste fue mi argumento principal) este punto de vista realista es mucho más verosímil en la realidad matemática que en la física, porque los objetos matemáticos son lo que parecen en mucha mayor medida que los objetos físicos. Una silla o una estrella no son ni lo más mínimo lo que parecen ser; cuanto más pensamos sobre ellos más borrosos se vuelven dentro de la sensación de indefinición que los rodea; pero «2» ó «317» no tienen nada que ver con sensaciones y sus propiedades se ponen de manifiesto más claramente cuanto más los examinamos. Puede ser que la física moderna encaje mejor en el marco de una filosofía idealista (yo no lo creo, pero hay físicos eminentes que así lo dicen). Por otra parte,

las matemáticas puras me parecen como una roca en la que cualquier tipo de idealismo zozobra: 317 es un número primo no porque lo pensemos nosotros o porque nuestras mentes hayan sido predispuestas a ello de una forma o de otra, sino porque así es, porque la realidad matemática está construida de esta forma.

25

Estas distinciones entre matemáticas puras y aplicadas son importantes en sí mismas, pero su repercusión en nuestra discusión sobre la «utilidad» de las matemáticas es muy pequeña. Hablé en la sección 21 de las matemáticas «auténticas» de Fermat y de otros grandes matemáticos; de las matemáticas que tienen un valor estético permanente como, por ejemplo, tiene la mejor matemática griega; de las matemáticas que son eternas porque lo mejor de ellas puede, como ocurre con la mejor literatura, continuar causando una satisfacción emocional intensa a miles de personas miles de años después. Estas personas fueron ante todo matemáticos puros (naturalmente esta distinción era entonces menos acusada de lo que es ahora); pero no estoy pensando solamente en ellos al hablar de las matemáticas puras. Yo incluyo a Maxwell y Einstein, a Eddington y a Dirac entre los matemáticos «auténticos». En nuestro tiempo, los grandes logros de las matemáticas aplicadas se han producido en la teoría de la relatividad y en la mecánica cuántica y estos temas son, al menos en el momento presente, casi tan inútiles como la teoría de números. Para bien o para mal, las partes más elementales y aburridas de las matemáticas aplicadas y de las puras son las que tienen una mayor utilidad. El transcurrir del tiempo puede hacer cambiar todo esto. Nadie previó en su momento las aplicaciones de las matrices, de la teoría de grupos y de otras teorías puramente matemáticas, a la física moderna, y puede ser que a algunas de las matemáticas aplicadas más «selectas» se les encuentre de forma inesperada «utilidad»; hasta ahora la evidencia apunta que tanto en una materia como en otra, es lo tópico y aburrido lo que sirve en la vida práctica.

Recuerdo a Eddington dando un ejemplo afortunado de la falta de atractivo de la ciencia «útil». La British Association organizó una reunión en

Leeds, y se pensó que a sus miembros les podría gustar escuchar algo relativo a las aplicaciones de la ciencia a la gran industria textil lanera. Pero las conferencias y demostraciones preparadas con este propósito fueron más bien un fracaso. Parecía que los asistentes (fueran o no habitantes de Leeds) preferían que los entretuvieran, y que la gran industria lanera no era un tema entretenido. La asistencia a dichas conferencias fue decepcionante; pero, sin embargo, los conferenciantes que hablaron sobre las excavaciones en Cnosos, sobre la relatividad o sobre la teoría de los números primos, resultaron entusiasmados con las audiencias que obtuvieron.

26

¿Qué partes de las matemáticas son útiles?

En primer lugar, la mayor parte de las matemáticas escolares, es decir, aritmética, álgebra elemental, geometría euclídea elemental y cálculo diferencial e integral elemental. Exceptuamos ciertas partes que sólo se enseñan a «especialistas» como la geometría proyectiva. Dentro de las matemáticas aplicadas, son útiles ciertas partes de la mecánica (pues la electricidad, tal como es enseñada en las escuelas, debe ser considerada como física).

Además, también es útil la mayor parte de las matemáticas universitarias, especialmente aquélla que realmente consiste en el desarrollo de las matemáticas escolares con una técnica más perfeccionada. También son útiles ciertas partes de materias con mayor contenido de física como la electricidad y la hidromecánica. Debemos tener en cuenta que un plus de conocimientos siempre es una ventaja y que el más práctico de los matemáticos se encontrará en desventaja si su conocimiento es el mínimo estricto para su trabajo; por esta razón, debemos añadir un poco más de conocimientos a cada una de las materias antes citadas, pero nuestra conclusión general debe ser que tales matemáticas son útiles desde el punto de vista de un ingeniero superior o de un físico mediocre; y esto es lo mismo que decir que tales matemáticas no tienen un particular mérito estético. Por ejemplo, en el caso de la geometría euclídea, cuanto más útiles son los conceptos, más aburridos resultan (pues no necesitamos ni el axioma de las rectas paralelas, ni la teoría de las proporciones, ni la construcción del pentágono regular). Ahora surge otra

conclusión bastante curiosa, y es que la matemática pura es, en conjunto, claramente más útil que la aplicada. El matemático puro parece gozar de la ventaja de lo práctico y de lo estético. Porque lo que es útil en las materias anteriores son sobre todo las técnicas y la mayor parte de las técnicas matemáticas se enseñan mediante la matemática pura.

Espero no necesitar decir que no estoy intentando rebajar la importancia de la física matemática, una materia espléndida, donde se plantean problemas inmensos y donde las mentes más fecundas han dado rienda suelta a su imaginación. ¿Pero no es algo patética la postura de un matemático aplicado ordinario? Si quiere ser útil debe trabajar de una forma rutinaria y no puede dejar volar a su imaginación aunque desee elevarse a las más altas cimas. Los universos imaginarios resultan mucho más hermosos que el «real» nuestro estúpidamente construido; y la mayor parte de los mejores resultados de la imaginación de un matemático aplicado deben ser rechazados nada más nacer por la brutal y suficiente razón de que no se adaptan a los hechos.

Seguramente, la conclusión general que puede extraerse de lo anterior destaca claramente. Si, como provisionalmente hemos acordado antes, el conocimiento útil es aquél que probablemente va a contribuir al bienestar material de la humanidad, ahora o en el futuro próximo, de tal forma que la mera satisfacción intelectual resulte irrelevante, entonces la mayor parte de las matemáticas superiores son inútiles. La geometría y el álgebra modernas, la teoría de números, la teoría de conjuntos y la de funciones, la relatividad y la mecánica cuántica, no pasarían con éxito la prueba de la utilidad, y no hay ningún matemático auténtico cuya vida pueda justificarse por esto. Si ésta fuera la prueba, entonces tanto Abel como Riemann y Poincaré desperdiciaron sus vidas, y su contribución al bienestar humano es insignificante, y el mundo hubiera sido un lugar igual de feliz sin ellos.

27

Tal vez pueda objetarse que mi concepto de «utilidad» sea demasiado limitado, que lo haya definido sólo en términos de «felicidad» o «bienestar». y que haya ignorado los efectos «sociales» de las matemáticas sobre los que autores recientes, con muy diferentes criterios, han hecho énfasis. Así, Whi-

tehead (que ha sido matemático) habla de «la enorme repercusión del conocimiento matemático sobre las vidas de las personas, sobre sus ocupaciones diarias y sobre la organización de la sociedad»; y Hogben (que no comparte mi criterio sobre lo que yo y otros matemáticos denominamos matemáticas en la misma medida en que Whitehead sí lo hace) dice que «sin un conocimiento de las matemáticas y de las leyes elementales de las magnitudes y del orden, no se puede planificar una sociedad racional en la que haya ocio para todos y pobreza para nadie».

No creo que toda esta elocuencia haga mucho por consolar a los matemáticos, pues el lenguaje de ambos escritores es bastante exagerado, y ambos ignoran matices muy obvios. Esto es bastante normal en el caso de Hogben puesto que se reconoce que no es un matemático y entiende por «matemáticas» las matemáticas que él puede comprender, que son las que yo he llamado matemáticas «escolares». Estas matemáticas tienen muchas aplicaciones, que como ya he admitido podemos denominar «sociales» si así nos place, y que Hogben enfatiza con interesantes anécdotas extraídas de la historia de los descubrimientos matemáticos. Es esto lo que proporciona el mérito a su libro, pues le permite aclarar, para muchos lectores que ni han sido ni serán matemáticos, que hay más cosas dentro de las matemáticas de las que ellos piensan. Sin embargo, Hogben apenas comprende las «auténticas matemáticas» (como cualquiera que lea lo que dice sobre el teorema de Pitágoras o sobre Euclides y Einstein reconocerá de inmediato), y tiene todavía menos afinidad con ellas (como no ahorra esfuerzos en demostrar). Las matemáticas auténticas son para él un objeto hacia el que muestra desdeñosa piedad.

No es falta de conocimiento o afinidad el problema en el caso de Whitehead, pero olvida, en su entusiasmo, distinciones con las que está bastante familiarizado. Las matemáticas que tienen esa «enorme repercusión» sobre las «ocupaciones diarias» y sobre «la organización de la sociedad» no son las de Whitehead sino las de Hogben. Las matemáticas que pueden ser usadas «para propósitos ordinarios por personas normales» son insignificantes, y las que pueden emplear economistas y sociólogos difícilmente llegan al nivel académico. Las matemáticas de Whitehead pueden afectar profundamente a la astronomía o a la física, incluso muy apreciablemente a la filosofía (el pensamiento de alto nivel en un campo es bastante probable que afecte al

pensamiento de alto nivel en otro) pero producen un efecto extraordinariamente pequeño en cualquier otra cosa. Sus «enormes repercusiones» se han producido, no sobre las personas en general, sino sobre personas del tipo del mismo Whitehead.

28

Existen, por tanto, dos tipos de matemáticas. Las auténticas, hechas por auténticos matemáticos, y las que yo llamo a falta de una palabra mejor, matemáticas «triviales». Estas últimas pueden ser justificadas con argumentos que atraerían a Hogben o a otros escritores de su escuela, pero tal justificación no sirve para las matemáticas auténticas, que en caso de poder ser justificadas de alguna forma, sólo lo podrían ser como un arte. No hay nada mínimamente paradójico o inusual en este punto de vista, que es el que mantienen normalmente los matemáticos.

Tenemos que considerar todavía otro problema. Hemos llegado a la conclusión de que las matemáticas triviales son, en su conjunto, útiles, y que las matemáticas auténticas no; que las matemáticas triviales hacen, en un cierto sentido el «bien», mientras que las auténticas no. Pero todavía tenemos que preguntarnos si uno u otro tipo de matemáticas produce daño. Sería paradójico sugerir que cualquier tipo de matemáticas produce daño en tiempo de paz, por lo que esto nos lleva a considerar los efectos de las matemáticas en la guerra. Es muy difícil discutir desapasionadamente tales temas ahora, y hubiera preferido evitarlo; sin embargo, parece inexcusable plantearse algún tipo de discusión. Afortunadamente, no necesita ser extensa.

Hay una conclusión tranquilizadora y fácil para un matemático auténtico. Las matemáticas auténticas no tienen efectos sobre la guerra. Nadie ha descubierto todavía ninguna aplicación militar de la teoría de los números y de la relatividad, y no parece probable que alguien lo haga en muchos años. Es cierto que hay ramas de las matemáticas aplicadas, como la balística y la aerodinámica, que han sido deliberadamente desarrolladas para la guerra y que exigen el dominio de una técnica bastante elaborada; quizá es difícil denominarlas «triviales», pero nadie tiene ningún derecho a clasificarlas como «auténticas». Son, por supuesto, repulsivamente feas e intolerablemente

aburridas; ni tan siquiera Littlewood ha conseguido hacer respetable a la balística. Si él no ha podido, ¿quién podría entonces? Por tanto un matemático auténtico tiene limpia su conciencia; no puede objetarse nada al valor que pudiera tener su trabajo; las matemáticas son, como dije en Oxford, una ocupación inocua e inocente.

Por el contrario, las matemáticas triviales tienen muchas aplicaciones en la guerra. Por ejemplo, los especialistas en artillería y los diseñadores de aviones no podrían realizar su trabajo sin ellas. Y está claro cuál es la consecuencia de sus aplicaciones: las matemáticas facilitan (aunque no tan obviamente como la física o la química) la guerra moderna, científica y «total».

No está tan claro como se pudiera pensar que lo anterior tenga que lamentarse, pues hay dos puntos de vista profundamente diferentes acerca de la guerra científica moderna. El primero y más obvio es que el efecto de la ciencia sobre la guerra es esencialmente magnificar su horror, tanto aumentando los sufrimientos de la minoría que lucha como extendiéndolos al resto de la población. Éste es el punto de vista más natural y ortodoxo. Pero hay otro muy diferente, que también parece defendible y que ha sido expuesto con gran vigor por Haldane en su obra *Callinicus*. Puede afirmarse que la guerra moderna es menos horrible que la guerra de las épocas precientíficas; que probablemente las bombas son más misericordiosas que las bayonetas, que el gas lacrimógeno y el gas mostaza son quizá las armas más humanas que haya concebido la ciencia militar y que el punto de vista ortodoxo antes mencionado está basado únicamente en cierto sentimentalismo ilógico[10]. Puede también defenderse (aunque ésta no era una de las tesis de Haldane) que la igualdad de riesgos que se esperaba que la ciencia trajese será saludable a largo plazo; que la vida de un civil no vale más que la de un soldado, ni la de una mujer más que la de un hombre; que cualquier cosa es mejor que la concentración de violencia en un grupo determinado; y que, en pocas palabras, cuanto antes la guerra despliegue toda su fuerza mejor.

No sé cuál de estos puntos de vista está más cerca de la verdad. Es una

[10] No deseo prejuzgar la cuestión con esta palabra tan mal utilizada, que puede ser usada de modo bastante legítimo para indicar cierto tipo de emoción desequilibrada. Por supuesto que mucha gente utiliza el término «sentimentalismo» como una forma de desprecio hacia los sentimientos decentes de otras personas, y el término «realismo» para encubrir su propia brutalidad.

cuestión acuciante y conmovedora, pero no tengo por qué discutirla aquí, ya que afecta sólo a las matemáticas «triviales». Es más bien el cometido de Hogben el defenderla y no el mío, ya que este asunto pudiera ser para sus matemáticas bastante más que una pequeña mancha; mientras que las mías no resultan afectadas.

Por supuesto que se puede añadir más, puesto que en cualquier caso hay un aspecto para el que las matemáticas auténticas sirven en la guerra. Cuando el mundo se vuelve loco un matemático puede encontrar en las matemáticas un analgésico incomparable, porque las matemáticas son, entre todas las artes y ciencias, la más austera y la más distante, y un matemático debe ser, entre todas las personas, el que más fácilmente pueda refugiarse donde «al menos uno de nuestros más nobles impulsos pueda evadirse mejor del triste exilio del mundo actual», como dijo Bertrand Russell. Es una pena que sea necesario hacer una salvedad muy seria: el matemático no debe ser demasiado viejo. La matemática no es una tarea contemplativa sino creativa; nadie puede encontrar mucho consuelo en ellas cuando ha perdido el poder o el deseo de crear; y esto le suele suceder bastante pronto a un matemático. Es una pena, pero en el caso de que así sea, el matemático ya no importa mucho y sería tonto preocuparse por él.

29

Finalizaré con un resumen de mis conclusiones, pero presentándolas de una forma más personal. Dije al principio que cualquiera que defienda su materia se encontrará defendiéndose a sí mismo; y mi justificación de la vida de un matemático profesional es seguro que va a ser, en el fondo, una justificación de la mía. Por tanto, esta conclusión será sustancialmente un fragmento autobiográfico.

No recuerdo haber querido ser otra cosa que matemático. Supongo que fue siempre evidente que mis habilidades iban por ese camino, y nunca se me ocurrió dudar del veredicto de mis mayores. Cuando era un niño, no recuerdo haber sentido ninguna *pasión* por las matemáticas, y las opiniones que podría haber tenido sobre la carrera de matemático distaban mucho de ser nobles. Pensaba en las matemáticas sólo en lo que se refiere a exámenes

y becas: quería ganar a los otros niños y éste me parecía el único camino en el que podría hacerlo más concluyentemente.

Tenía alrededor de quince años cuando (de una forma bastante extraña) mis ambiciones cambiaron bruscamente. Existe un libro de «Alan St Aubyn», que lleva por título *Un profesor del Trinity* (*A Fellow of Trinity*), uno de una serie de libros que trataban de lo que se suponía que era el ambiente universitario en Cambridge. Supongo que este libro es peor que cualquiera de los de Marie Corelli, pero un libro difícilmente puede ser todo él malo si despierta la imaginación de un niño inteligente. Había dos héroes, el principal se llamaba Flowers y era casi totalmente bueno. El secundario se llamaba Brown y era una persona sin carácter. Flowers y Brown se ven expuestos a muchos peligros en la vida universitaria, pero el peor es un salón de juego en Chesterton regentado por las hermanas Bellenden, dos fascinantes pero extremadamente perversas señoritas. Flowers supera todos los problemas, llega a ser *Segundo Wrangler* y *Senior Classic*, y logra obtener automáticamente una plaza de *Fellow* (como supongo que sucedía entonces). Brown sucumbe, arruina a sus padres, se da a la bebida, es salvado del *delirium tremens* durante una tormenta por las oraciones del *Junior Dean*, le resulta muy difícil obtener siquiera un diploma normal, y finalmente se convierte en misionero. Su amistad no se ve alterada por estos infelices sucesos y a Flowers le vienen a la cabeza recuerdos de Brown cuando está bebiendo una copa de Oporto y comiendo cacahuetes en la *Senior Combination Room*.

Aunque Flowers era un tipo bastante decente (en la medida en que «Alan St Aubyn» podía describirlo), incluso mi poco sofisticada mente rechazaba aceptarlo como inteligente. Si él podía conseguir esas cosas, ¿por qué yo no? En particular, la escena final en la *Senior Combination Room* me fascinó completamente y, desde entonces, hasta que lo conseguí, las matemáticas significaban para mí conseguir una *Fellowship* en el *Trinity*.

Pronto descubrí, cuando llegué a Cambridge, que ocupar una *Fellowship* significaba desarrollar un «trabajo original», pero pasó mucho tiempo antes de que formase una idea definitiva sobre la investigación.

En la escuela había por supuesto descubierto, como lo hace cualquier futuro matemático, que a menudo podía hacer las cosas mejor que mis maestros; e incluso en Cambridge descubrí, aunque naturalmente mucho menos

frecuentemente, que, a veces, podía hacer las cosas mejor incluso que los que impartían las clases. Sin embargo, incluso una vez obtenida la licenciatura, tenía escasos conocimientos de las áreas en las que iba a trabajar el resto de mi vida; y todavía sigo pensando en las matemáticas como en una asignatura esencialmente competitiva. El primero que me abrió los ojos fue el profesor Love, que me dio clase durante algunos trimestres y me proporcionó mi primera concepción seria del análisis, pero la gran deuda que contraje con él (era, después de todo, fundamentalmente un matemático aplicado) fue su consejo de que leyera el famoso *Cours d'analyse* de Jordan. Nunca olvidaré el asombro con el que leí este notable trabajo, que ha sido la fuente de inspiración de mi generación: según lo leía aprendí por primera vez qué significaban realmente las matemáticas. Desde entonces fui a mi manera un auténtico matemático con sólidas ambiciones matemáticas y una genuina pasión por ellas.

Escribí bastante durante los siguientes diez años, aunque poco que tuviera alguna importancia; sólo hay cuatro o cinco artículos que pueda recordar con cierta satisfacción. Los momentos críticos de mi carrera se presentaron diez o doce años más tarde, en 1911, cuando comencé mi largo periodo de colaboración con Littlewood, y en 1913, cuando descubrí a Ramanujan. Desde entonces, mis mejores trabajos han estado unidos a los suyos y es obvio que mi asociación con ellos fue el hecho decisivo de mi vida. Todavía me digo cuando estoy deprimido y me veo obligado a escuchar a personas pomposas y aburridas, «bueno, he hecho una cosa que usted nunca podría haber hecho, que es haber colaborado tanto con Littlewood como con Ramanujan en, digamos, igualdad de condiciones». A ellos les debo una madurez creativa inusualmente tardía: mi mejor momento fue cuando tenía más de cuarenta años y era profesor en Oxford. Desde entonces he sufrido un continuo deterioro que es el destino común reservado a las personas mayores y especialmente a los matemáticos mayores. Un matemático todavía puede ser bastante competente a los sesenta, pero es inútil esperar de él que siga produciendo ideas originales.

Está claro que mi vida, en lo que tiene algo de valor, está acabada, y que no puedo hacer nada que incremente o disminuya perfectiblemente su valor. Es difícil ser desapasionado, pero la considero un «éxito»; he tenido más recompensas de las que pudiera cosechar una persona de mi nivel de

competencia profesional y he ocupado cargos cómodos y «decorosos». He tenido pocos problemas con la parte más aburrida de la rutina universitaria. Odiaba «enseñar» y lo he tenido que hacer poco, y lo que he hecho ha consistido casi enteramente en supervisar investigaciones; me gusta dar clases y he dado muchas a grupos extremadamente dotados; y siempre dispuse de mucho tiempo libre para las investigaciones que han sido la más grande y permanente fuente de felicidad de mi vida. Encontré fácil trabajar con otros, y he colaborado a gran escala con dos matemáticos excepcionales; lo que me ha permitido incorporar a las matemáticas bastante más de lo que pudiera razonablemente haber esperado. También he tenido mis desilusiones como cualquier otro matemático, pero ninguna de ellas ha sido demasiado importante ni me ha hecho especialmente desgraciado. Si a los veinte años me hubieran ofrecido una vida ni mejor ni peor que ésta, la hubiera aceptado sin dudar.

Parece absurdo suponer que me hubiera podido «ir mejor». Carezco de habilidades lingüísticas o artísticas y tengo muy poco interés por las ciencias experimentales. Podría haber sido un filósofo aceptable, pero no muy original. Pienso que podría haber sido un buen abogado; pero el periodismo es la única profesión fuera de la vida académica, en la que yo hubiera confiado en mis posibilidades. De cualquier modo, si el criterio de valoración es el de lo que hoy normalmente llamamos éxito, no hay duda de que acerté al convertirme en matemático.

Mi elección fue correcta si lo que quería era una vida razonablemente cómoda y feliz. Sin embargo, abogados, agentes de bolsa y corredores de apuestas llevan a menudo una vida cómoda y feliz, y es muy difícil ver cómo el mundo se ve enriquecido con su existencia. ¿Puedo yo, en algún sentido, pensar que mi vida ha sido menos fútil que la de ellos? Me parece que hay una única respuesta posible: quizá sí, pero, si así es, sólo por una razón.

No he hecho nunca nada útil, ningún descubrimiento mío ha producido, o va a hacerlo directa o indirectamente, para bien o para mal, la menor diferencia en el bienestar del mundo. He ayudado a formar a otros matemáticos, pero del mismo tipo que yo, y su trabajo ha sido, al menos en la parte en que yo les he ayudado, tan inútil como el mío. Si se juzga desde un punto de vista práctico, el valor de mi vida matemática es nulo; y, en cualquier caso,

es trivial fuera de las matemáticas. Sólo tengo una posibilidad de escapar a un veredicto de completa trivialidad: que pueda ser juzgado por haber creado algo digno de serlo. Y no se puede negar que he creado algo, el problema estriba en determinar su valor.

Por tanto, la justificación de mi vida o la de cualquier otro que haya sido matemático en el mismo sentido en que yo lo he sido, es ésta: he añadido algo al conocimiento y he ayudado a otros a añadir más; estas aportaciones tienen un valor que difiere sólo en grado, pero no en el tipo, de las creaciones de los grandes matemáticos, o de las de cualesquiera otros artistas, grandes o pequeños, que hayan dejado algún tipo de huella detrás de sí.

Nota

Tanto el profesor Broad como el doctor Snow me han indicado que si quiero alcanzar un equilibrio justo entre lo bueno y lo malo que ha hecho la ciencia, no debo obsesionarme por sus repercusiones en la guerra; y que incluso cuando pienso en ellas debo recordar que hay muchas más, además de las puramente destructivas. Así pues (considerando primero el último aspecto), debo recordar que:

a) La organización de toda una población para la guerra sólo es posible con métodos científicos.

b) La ciencia ha incrementado enormemente el poder de la propaganda, que es utilizada casi exclusivamente para hacer el mal.

c) Ha convertido a la neutralidad en algo imposible o sin significado, pues ya no existen «islas de paz» desde las que la cordura y la reconstrucción puedan extenderse gradualmente después de la guerra.

Por supuesto que todo esto tiende a reforzar los argumentos contra la ciencia. Por otro lado, incluso si analizamos al máximo los argumentos, es difícil mantener seriamente que el mal hecho por la ciencia no haya sido en conjunto compensado por el bien. Por ejemplo, si en cada guerra se perdiesen diez millones de vidas, el efecto neto de la ciencia sería todavía el haber incrementado la duración media de la vida. En resumen, la sección 28 es demasiado «sentimental».

No discuto la justicia de estas críticas, pero por las razones que indico en el prefacio, ha sido imposible introducirlas en mi texto y me doy por satisfecho con este reconocimiento.

El doctor Snow también ha hecho un comentario interesante sobre la sección 8. Incluso si damos por supuesto que «Arquímedes será recordado cuando Esquilo haya sido olvidado», ¿no es la fama matemática demasiado «anónima» para ser plenamente satisfactoria? Podemos llegar a tener una visión bastante buena de la personalidad de Esquilo (y, por supuesto, mucho más en los casos de Shakespeare o Tolstoi) únicamente recurriendo a

sus obras, mientras que Arquímedes y Eudoxo permanecerán como meros nombres.

J. M. Lomas dijo lo mismo de una forma más pintoresca cuando pasábamos junto a la columna de Nelson, en *Trafalgar Square*. Si yo tuviera una columna con una estatua en Londres, ¿preferiría que la columna fuese tan alta que la estatua fuera invisible, o suficientemente baja para que se reconociesen los rasgos? Yo escogería la primera alternativa, y el doctor Snow, probablemente, la segunda.